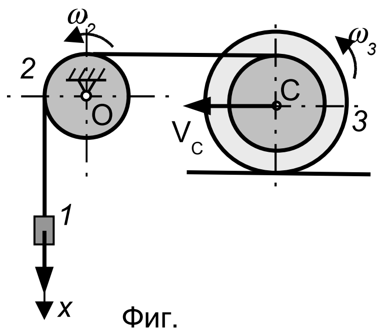
Дадено: $m_1 = 15$ kg, $m_2 = 25$ kg, $m_3 = 50$ kg, $R_2 = 0{,}2$ m, $R_3 = 0{,}4$ m, $r_3 = 0{,}3$ m, $i_3 = 0{,}1$ m, .

Решение

Разглежданата система има една степен на свобода. За обобщена координата се избира абсцисата x на товара *1* спрямо координатната ос. Координатното начало е в положението,



Фиг.

$$\vec{G}_1$$

което заема той в началния момент. Скоростта на товара *1* е $v_1 = \dot{x}$. За ъгловите скорости на барабаните *2* и *3* и за скоростта на центъра (т. *C*) на *3* се намира

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{\dot{x}}{R_2}, \quad \omega_3 = \frac{\dot{x}}{r_3 + R_3}, \quad v_C = \frac{\dot{x}.R_3}{r_3 + R_3}.$$

Уравнението на Лагранж, описващо движението на системата, има вида

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x .$$

Определят се кинетичните енергии на отделните тела в системата.

Товарът *1* извършва *транслационно* движение. Кинетичната му енергия е

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1.v_1^{\,2} = \frac{1}{2} m_1.\dot{x}^2 .$$

Барабанът *2* извършва *ротационно* движение. За кинетичната му енергия се намира

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O.\omega_2^{\,2} = \frac{1}{2}\frac{m_2.R_2^{\,2}}{2}.\left(\frac{\dot{x}}{R_2}\right)^2 = \frac{m_2}{4}\dot{x}^2,$$

където I_O е масовият инерционен момент на барабана спрямо оста на въртене, минаваща през масовия му център, перпендикулярно на равнината на движение.

Двустепенният барабан *3* извършва *равнинно* движение. Кинетичната му енергия е

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3.v_C^{\,2} + \frac{1}{2} I_C.\omega_3^{\,2} = \frac{1}{2} m_3.\left(\frac{R_3.\dot{x}}{r_3 + R_3}\right)^2 + \frac{1}{2} m_3.i_3^{\,2}\left(\frac{\dot{x}}{r_3 + R_3}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{i_3^{\,2} + R_3^{\,2}}{(r_3 + R_3)^2} m_3.\dot{x}^2,$$

където $I_C = m_3.i_3^2$ е масовият инерционен момент на барабана спрямо оста на въртене, минаваща през масовия му център, перпендикулярно на равнината на движение.

Кинетичната енергия на цялата система е равна на сумата от кинетичните енергии на всички тела

$$T = \sum T_i = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2 .}{2} + \frac{i_3^{\ 2} + R_3^{\ 2}}{(r_3 + R_3)^2} m_3 \right).\dot{x}^2 ,$$

$$T = \frac{1}{2}\left(15 + \frac{25}{2} + \frac{0{,}1^2 + 0{,}4^2}{(0{,}3 + 0{,}4)^2} 50 \right)\dot{x}^2 = 22{,}42.\dot{x}^2 .$$

Производните са

(2) $\quad \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 44{,}85.\dot{x}, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 44{,}85.\ddot{x}, \quad \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0.$

За да се определи обобщената сила Q_x, се намира възможната работа на всички активни сили, приложени върху системата. От тези сили работа извършва само теглото на товара *1*

$$\delta A = G_1.\delta x = m_1.g.\delta x = 9{,}81\,.\,15.\delta x = 147{,}15.\delta x$$

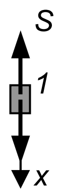
(3) $\quad \Rightarrow \ Q_x = 147{,}15 \ N.$

Изразите (2) и (3) се заместват в уравнението на Лагранж (1)

$44{,}85.\ddot{x} = 147{,}15 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 3{,}28 \ \ m/s^2$ – това е ускорението.

Силата във въжето се намира, като то мислено се среже и в мястото на срязване се постави търсената сила S

$$m_1.\ddot{x} = G_1 - S \Rightarrow S = G_1 - m_1\ddot{x} = g.m_1 - m.\ddot{x} = (9{,}81 - 3{,}38).15 = 97{,}95N$$



$$\vec{G_1}$$