

Уравнения на Лагранж от втори род

Уравненията на Лагранж от II-ри род са мощен метод за извод на диференциалните уравнения (ДУ) на механични и електромеханични системи (при прилагане на електромеханичната аналогия). Нека имаме една холономна система със s степени на свобода, състояща се от материалните точки M_i ($i=1, 2, \dots, n$), положенията на които се определят от радиус-векторите \mathbf{r}_i , функции на обобщените координати q_1, q_2, \dots, q_s . Системата се движи под действието на зададените активни сили \mathbf{F}_i ($i=1, 2, \dots, n$), при наложени идеални връзки. Уравненията на Лагранж се записват във вида:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, s,$$

където T е кинетичната енергия на системата, изразена чрез обобщените координати и обобщените скорости, с използване на уравненията на връзките, а Q_j - обобщените сили, съответстващи на обобщените координати. Тези уравнения образуват система от обикновени ДУ от втори род относно функциите $q_j = q_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, s$ и са ДУ на движение на механичната система в независимите обобщени координати.

В частния случай, когато силите \mathbf{F}_i , $i=1, 2, \dots, n$ са консервативни и за тях съществува потенциална енергия $\Pi = \Pi(x, y, z, t) = \Pi(q, t)$, обобщените сили се определят по формулата

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s$$

В този случай уравненията на Лагранж се записват във вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

където $L = T - \Pi$ се нарича функция на Лагранж.

Положителни моменти в приложението на уравненията на Лагранж от II-ри род:

1. В тях не се появяват идеалните реакции на връзките.
2. Единен подход за извод на ДУ при всички задачи, независимо от степента на тяхната сложност.

Последователност на съставяне на уравненията на Лагранж от II-ри род:

1. Определяме броя на степените на свобода на системата и избираме подходящи независими параметри за обобщени координати.
2. Пресмятаме кинетичната енергия T на системата и я изразяваме като функция на обобщените координати и обобщените скорости.
3. Задаваме възможни премествания на системата и пресмятаме обобщените сили Q_j на системата чрез възможната работа δA . Ако върху системата действуват само

консервативни сили и идеални реакции, определяме потенциалната енергия и съставяме функцията на Лагранж.

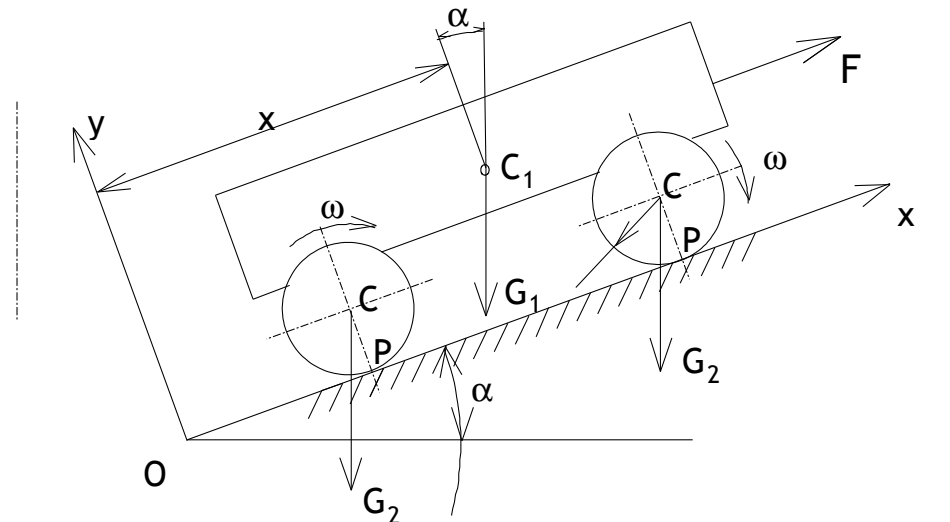
4. Пресмятаме необходимите производни и съставяме уравненията на Лагранж.

5. Решаваме при зададени начални условия ДУ на движение на системата и намираме закона на движение в обобщени координати:

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_s = q_s(t).$$

Задача 1.

Количка се състои от платформа с маса M и четири еднакви колела с маса m и радиус r всяко. Количката се движи нагоре по наклонена под ъгъл α спрямо хоризонта равнина под действието на сила \mathbf{F} , приложена на платформата, успоредно на наклонената равнина. Колелата на количката се търкалят по равнината без плъзгане. Да се определи ускорението на платформата. Триенето в лагерите и съпротивлението при търкалянето на колелата да се пренебрегне. Колелата да се приемат за еднородни дискове.



Фиг. 1.

Решение.

1) Обектът е холономна система с една степен на свобода ($s=1$). Наистина, при предположението, че колелата се търкалят без плъзгане по наклонената равнина, ако изберем като параметър координатата x , изразяваща преместването на платформата (фиг. 1) по направление на наклонената равнина и фиксираме този параметър, системата ще се окаже в състояние на покой (колелата ще са неподвижни, защото положението им се определя от две неподвижни точки - осите към количката и контактната точка с наклонената равнина). Нека x е абсцисата на масовия център на платформата. Връзките, наложени на системата са идеални, така че движението става

под действието на зададената сила F и теглата на платформата и колелата. Означаваме с G_1 теглото на платформата, а с G_2 - това на едно колело.

За разглежданата система трябва да съставим само едно уравнение на Лагранж от II-ри род. При избраната обобщена координата то се записва

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

Намирането на ускорението на платформата се свежда до съставяне на това ДУ.

2) Ако означим с T_1 кинетичната енергия на платформата, а с T_2 - кинетичната енергия на едно от колелата, то кинетичната енергия на системата ще бъде

$$T = T_1 + 4T_2.$$

Платформата се движи транслационно със скорост $v = \dot{x}$ и следователно

$$T_1 = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

Колелата извършват равнинно движение и за кинетичната енергия на всяко от тях можем да напишем

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Скоростта на движение на масовия център на колелото е равна на скоростта на движение на платформата, към която е закрепена оста на колелото, т.е. $v_C = \dot{x}$. Точката на контакта на колелото с наклонената равнина е моментният център на колелото (имаме търкаляне без плъзгане) и от кинематика на равнинното движение $v_C = \tilde{\omega} \cdot PC = \tilde{\omega} \cdot r$. Тогава ъгловата скорост на колелата е

$$\tilde{\omega} = \frac{v_C}{r} = \frac{\dot{x}}{r}.$$

Като се вземе предвид че инерционния момент на еднороден диск е $I_C = \frac{1}{2} m r^2$, изразът за

кинетичната енергия на едно колело е

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

В резултат за кинетичната енергия на системата получаваме:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + 4 \cdot \frac{3}{4} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} (M + 6m) \dot{x}^2$$

3) За да определим обобщената сила, ще дадем на системата възможно преместване и ще определим възможната работа на активните сили. Платформата и осите на колелата, които са свързани с нея, получават възможно преместване $\delta r = \delta x$ по посока на оста x и възможната работа е

$$\delta A = \sum F_i \cdot \delta r_i = F \cdot \delta r + G_1 \cdot \delta r + G_2 \cdot \delta r = F \cdot \delta x - Mg \sin \alpha \cdot \delta x - 4 \cdot m g \sin \alpha \cdot \delta x$$

Следователно

$$\delta A = [F - (M + 4m)g \sin \alpha] \cdot \delta x = Q_x \cdot \delta x$$

и обобщената сила Q_x е равна на коефициента пред δx , т.е.

$$Q_x = F - (M + 4m)g \sin \alpha$$

4) Извършваме диференциранията по схемата на уравнението на Лагранж:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M + 6m) \dot{x},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M + 6m) \ddot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

и диференциалното уравнение приема вида:

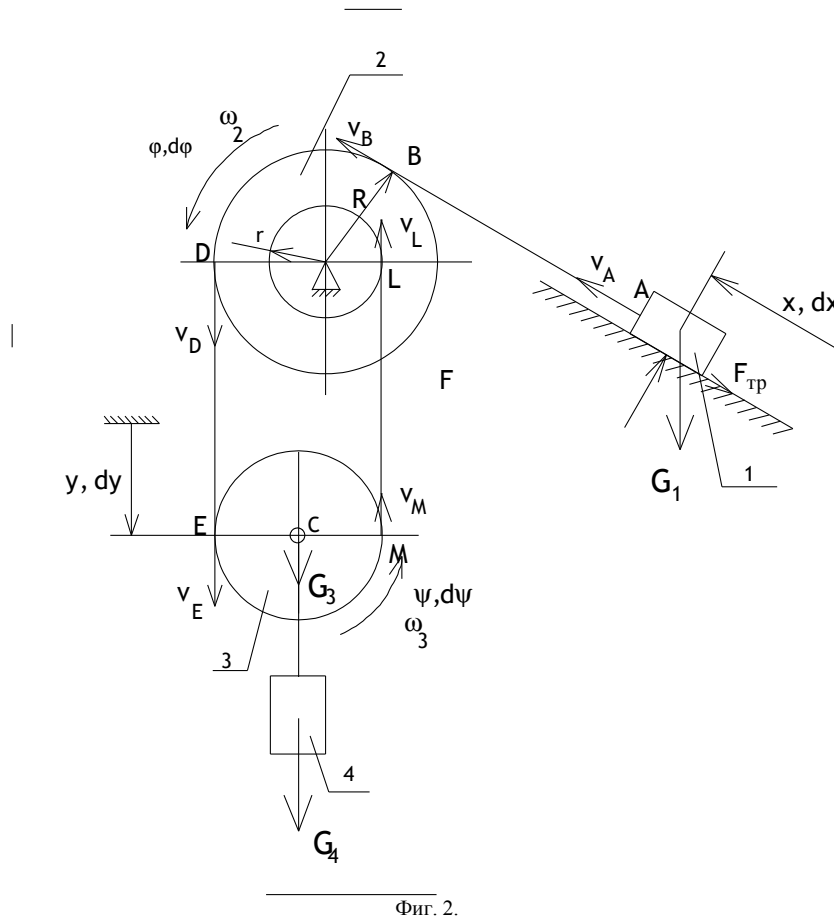
$$(M + 6m) \ddot{x} = F - (M + 4m)g \sin \alpha$$

За ускорението на платформата се получава

$$\ddot{x} = \frac{F - (M + 5m)g \sin \alpha}{M + 6m}.$$

Задача 2.

Тяло 1 с маса m_1 се движи по наклонена по ъгъл α равнина с коефициент на триене при плъзгане μ . Към тялото е привързана нишка, която обхваща голямата степен на макара 2 с радиус $R_2=R$, подвижната макара 3 и другият ѝ край е намотан на малката степен на макара 2 с радиус $r_2=r$. Към оста на макара 3 е прикрепено тялото 4 с маса m_4 . Макаратата 2 има маса m_2 и инерционен радиус i_2 ; макаратата 3 да се разгледа като еднороден диск с маса m_3 . В началния момент системата е била в покой. Да се определи ускорението на тяло 1, ако предположим че съотношението на масите е такова, че тяло 1 се плъзга нагоре по наклонената равнина. Нишките, свързващи макарите, са вертикални.



Решение:

Системата има една степен на свобода. За обобщена координата избираме абсцисата x на тяло 1, измервана от произволен репер, успоредно на наклонената равнина нагоре. Предполагаме, че координата x нараства, т.е. че тяло 4 се спуска ускорително. Нанасяме активните сили - теглата на телата 1, 3 и 4 (G_1 , G_3 и G_4); освен това премахваме

неидеалната връзка (наклонената равнина) и заменяме действието ѝ с реакции N и F_{TP} .

За силата на триене веднага можем да напишем:

$$F_{TP} = \mu \cdot N = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

(От уравнението на динамиката в направление, нормално на движението на тяло 1 имаме

$$m_1 a_n^1 = 0 = N - m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad \text{и от там за нормалната реакция} \quad N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

1) Системата има една степен на свобода, $s=1$. Това може да се провери, като изберем като първа обобщена координата $q_1 = x$ и я фиксираме. Наклонената нишка между тяло 1 и макаратата 2 е неподвижна и следователно макарата 2, която извършва ротационно движение също е неподвижна. Вертикалните нишки DE и LM, свързващи макари 2 и 3 са неподвижни, което осигурява неподвижността на макара 3 и свързаното с нея тяло 4.

2) Кинетичната енергия на системата е равна на сумата от кинетичните енергии на телата

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

където с индекси от 1 до 4 сме означили кинетичните енергии на съответните тела.

Тяло 1 се движи транслационно със скорост v_A ($v_A = \dot{x}$) и следователно

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

Макарата 2 извършва ротационно движение с ъглова скорост $\tilde{\omega}_2$ и за кинетичната ѝ енергия имаме:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega_2^2,$$

където за макаратата с инерционен радиус i_2 и маса m_2 имаме инерционен момент $I_O = m_2 i_2^2$.

За определяне на ъгловата скорост имаме $v_B = v_A = \dot{x}$, като при ротационно движение

$$v_B = \tilde{\omega}_2 \cdot OB = \tilde{\omega}_2 \cdot R_2 = \tilde{\omega}_2 \cdot R \quad \text{и оттук}$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\dot{x}}{R}$$

и следователно

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 \cdot i_2^2}{R^2} \dot{x}^2$$

Макарата 3 извършва равнинно движение. За определяне на кинетичната ѝ енергия

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_3^2$$

Имаме за инерционния момент на еднороден диск

$$I_C = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{R+r}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} m_3 (R+r)^2.$$

За определяне на кинематичните величини имаме

$$\delta A = \left(-m_1 g \sin \alpha - F_{TP} + (m_3 + m_4) g \frac{R-r}{2R} \right) \delta x = Q_x \delta x$$

$$Q_x = -m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha + (m_3 + m_4) g \frac{R-r}{2R}$$

4) Диференцираме по схемата на уравненията на Лагранж:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = A \dot{x};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = A \ddot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

и получаваме ДУ на движение (\ddot{x} е търсеното ускорение на тяло 1!):

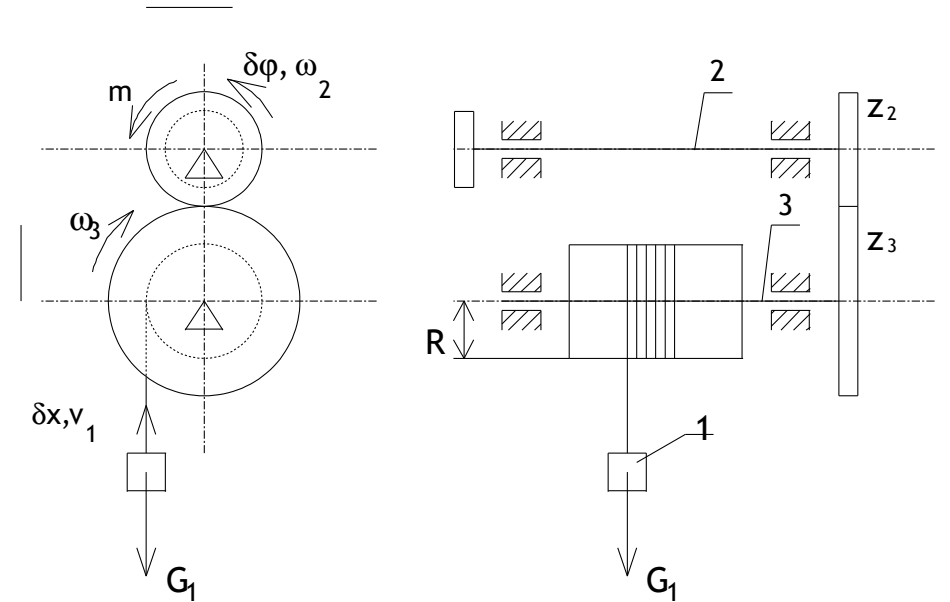
$$\left(m_1 + m_2 \frac{i_2^2}{R^2} + \frac{m_3}{8R^2} (R^2 - 6Rr + r^2) + m_4 \frac{(R-r)^2}{R^2} \right) \ddot{x} = -m_1 g \sin \alpha + \mu m_1 g \cos \alpha + (m_3 + m_4) g \frac{R-r}{2R}$$

Задача 3.

Тяло 1 с маса M се издига с помощта на лебедка (фиг. 4). На водещия вал 2 на лебедката действа постоянен въртящ момент m . Да се определи ускорението на тяло 1, ако масовите инерционни моменти на валове 2 и 3 и свързаните с тях тела са съответно I_2 и

I_3 . Радиусът на барабана е R , а предавателното отношение на зъбната предавка - $\frac{z_3}{z_2} = k$.

Триенето в лагерите и масата на въжето да се пренебрегнат.



Фиг. 4.

1) Системата има една степен на свобода. Избираме за обобщена координата височината на издигане на товара 1:

$$s = 1, \quad q_1 = x$$

При избраната обобщена координата уравнението на Лагранж има вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

2) Кинетичната енергия на системата, състояща се от три тела е

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

където с индексите 1, 2 и 3 са отбелязани кинетичните енергии на тела 1, 2 и 3 съответно. Тяло едно се движи постъпателно. Скоростта му намираме по формулите за кинематика на точка в декартови координати $v_1 = \dot{x}$ и за кинетичната енергия:

$$T_1 = \frac{1}{2} M v_1^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

Валове 2 и 3 извършват ротационно движение и техните кинетични енергии са

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2; \quad T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

където $\tilde{\omega}_2$ и $\tilde{\omega}_3$ са съответните ъглови скорости. От кинематичните съотношения

$$v_1 = v_A = \omega_3 \cdot O_3 B = \omega_3 R$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{z_3}{z_2} = k$$

изразяваме ω_2 и ω_3 чрез обобщената скорост \dot{x} :

$$\omega_3 = \frac{\dot{x}}{R},$$

$$\omega_2 = k\omega_3 = \frac{k\dot{x}}{R}$$

След прости преобразования получаваме кинетичната енергия на системата:

$$T = \frac{1}{2} \left(M + \frac{k^2 I_2 + I_3}{R^2} \right) \dot{x}^2.$$

3) Възможната работа на системата активни сили е

$$\delta A = \sum F_i \cdot \delta r_i = G_1 \cdot \delta r_1 + m \cdot \delta \varphi$$

От кинематичните съотношения получаваме уравненията на връзките във възможни премествания:

$$\omega_2 = \frac{k\dot{x}}{R} \rightarrow \delta \varphi = \frac{k}{R} \delta x$$

и чрез възможната работа определяме обобщената сила

$$\delta A = -G_1 \delta x + m \cdot \frac{k}{R} \delta x = \left(-Mg + \frac{mk}{R} \right) \delta x$$

$$Q_x = -Mg + \frac{mk}{R}$$

4) Диференцираме съгласно схемата

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(M + \frac{k^2 I_2 + I_3}{R^2} \right) \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \left(M + \frac{k^2 I_2 + I_3}{R^2} \right) \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

и получаваме ДУ на движение на лебедката:

$$\left(M + \frac{k^2 I_2 + I_3}{R} \right) \ddot{x} = -Mg + \frac{mk}{R}$$

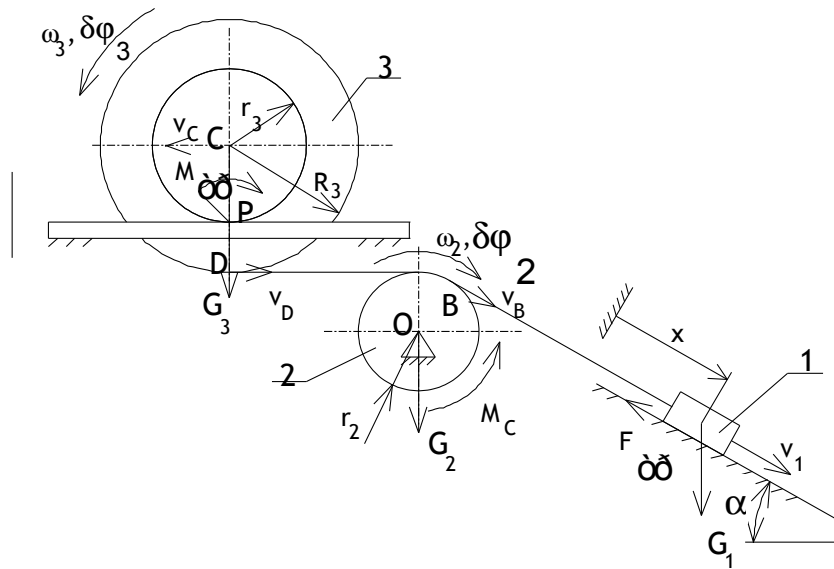
Ускорението на тяло 1, което се търси, е

$$a_{\square} = \ddot{x} = \frac{-Mg + \frac{mk}{R}}{M + \frac{k^{\square} I_{\square} + I_{\square}}{R^{\square}}}$$

Задача 4.

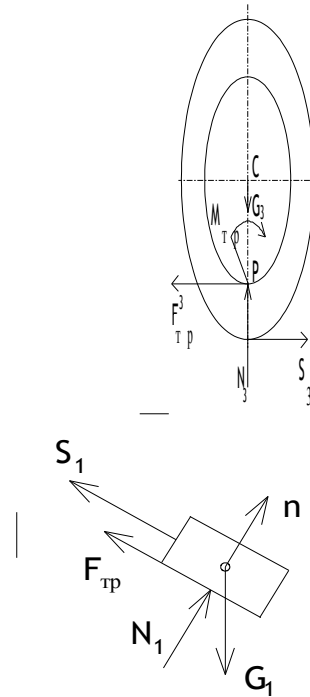
Тяло 1 с маса m_1 от показаната на фиг. 5 система се спуска надолу по грапава наклонена под ъгъл α равнина (коефициент на триене при плъзгане μ). Посредством безмасова нишка, минаваща успоредно на наклонената равнина и прехвърлена през ролката 2 и намотана на по-големия цилиндър на тяло 3, се заставя валът (по-малкият цилиндър) да се търкаля без плъзгане по хоризонтална релса. Двата цилиндъра на тяло 3, с радиуси R_3 и r_3 , са свързани твърдо помежду си и имат маса m_3 и инерционен радиус i спрямо ос, перпендикулярна на равнината на чертежа и минаваща през масовия център С. Ролката 2 да се разгледа като еднороден диск с радиус r_{\square} и маса m_2 . При търкаляне на тяло 3, то изпитва съпротивление от триене при търкаляне с коефициент на триене f [m]. Да се определи ускорението на тяло 1. Триенето в опората О на ролката 2 да се отчете чрез съпротивителния момент M_C .

1) Системата има една степен на свобода. За обобщена координата избираме абсцисата на тяло 1, измервана от произволен репер, успоредно на наклонената равнина, надолу. Нанасяме активните сили - теглата на тела 1, 2 и 3 (G_1 , G_2 и G_3). Премахваме неидеалните връзки и нанасяме съпротивителните сили, които извършват работа (фиг. 6 и 7). Там въвеждаме и реакциите. За силата на триене $F_{\text{тр}}$ можем да напишем:



Фиг. 5.

$$F_{TP}^1 = \mu N_1 = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha.$$



Фиг. 6.

Фиг. 7.

Тук нормалната реакция определяме от основното уравнение на динамиката на материална точка, проектирано в направление, нормално на движението на тяло 1 - $m_1 a_n^1 = 0 = N_1 - G_1 \cdot \cos \alpha = N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$ и от там за нормалната реакция - $N_1 = m_1 g \cos \alpha$. За момента на триене при търкаляне върху колело 3 имаме

$$M_T = f \cdot N_3 = f \cdot m_3 \cdot g$$

където нормалната реакция определяме от уравнението за движението на масовия център, проектирано върху вертикално направление. Тъй като т. С се движи в хоризонтално направление имаме

$$m_3 a_C^6 = 0 = N_3 - G_3 = N_3 - m_3 \cdot g$$

и следователно

$$N_3 = m_3 \cdot g$$

Уравнението на Лагранж в избраната координата ще има вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

2) Кинетичната енергия на системата е равна на сумата от кинетичните енергии на телата

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

където с индекси от 1 до 3 са означени кинетичните енергии на съответните тела.

Тяло 1 се движи транслационно, със скорост \mathbf{v}_1 ($v_1 = \dot{x}$) и за кинетичната енергия имаме

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

Ролката 2 се движи ротационно с ъглова скорост $\tilde{\omega}_2$ и за кинетичната енергия имаме:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega_2^2,$$

където за ролката с маса m_2 и радиус r_2 определяме инерционен момент $I_O = \frac{1}{2} r_2^2$.

Ъгловата скорост $\tilde{\omega}_2$ определяме от кинематичните уравнения $v_B = v_1 = \dot{x}$;

$v_B = \tilde{\omega}_2 \cdot OB = \tilde{\omega}_2 \cdot r_2$ и оттам $\tilde{\omega}_2 = \frac{\dot{x}}{r_2}$ и следователно

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{4} m_2 \dot{x}^2$$

Тяло 3 извършва равнинно движение, като се търкаля без плъзгане по вала с радиус r_3 по хоризонталната релса. За кинетичната енергия

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_3^2$$

където инерционния момент на тялото с маса m_3 и инерционен радиус i е $I_C = m_3 i^2$. От кинематиката на равнинното движение - тяло 3 се търкаля без плъзгане - следователно допирната точка до релсата е моментен център на скоростите. Връзката с тяло 2 и 1 - неразтеглива нишка довежда до кинематичното съотношение

$$v_D = v_B = v_1 = \dot{x}$$

а от кинематиката на равнинното движение

$$v_D = \tilde{\omega}_3 \cdot PD = \tilde{\omega}_3 \cdot (R_3 - r_3).$$

Окончателно за ъгловата скорост имаме

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{\dot{x}}{R_3 - r_3}.$$

Скоростта на точка С намираме по формулата

$$v_C = \tilde{\omega}_3 \cdot PC = \tilde{\omega}_3 \cdot r_3 = \frac{\dot{x} r_3}{R_3 - r_3}$$

Окончателния израз за кинетичната енергия на тяло 3 става:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{\dot{x} r_3}{R_3 - r_3} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 i^2 \left(\frac{\dot{x}}{R_3 - r_3} \right)^2$$

Кинетичната енергия на системата е

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{\dot{x}^2 r_3^2}{(R_3 - r_3)^2} + \frac{1}{2} m_3 i^2 \frac{\dot{x}^2}{(R_3 - r_3)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 \frac{r_3^2 + i^2}{(R_3 - r_3)^2} \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} A \dot{x}^2 \end{aligned}$$

3) Даваме възможно преместване $\delta r_1 = \delta x$ тяло 1 в посока на нарастването на координата x . Възможната работа на активните и съпротивителните сили, приложени върху телата от системата е (работата на силите, приложени в неподвижни точки, както и тези, перпендикулярни към преместването на приложната им точка е тъждествено равна на нула)

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_i F_i \cdot \delta r_i = G_1 \cdot \delta r_1 + F_{TP} \cdot \delta r_1 - M_C \delta p_2 - M_{TP} \delta p_3 = \\ &= G_1 \delta r_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - F_{TP} \delta r_1 - M_C \delta p_2 - M_{TP} \delta p_3 \end{aligned}$$

Уравненията на връзките във възможни премествания получаваме като се възползваме от еднаквата структура на тези зависимости в скорости и възможни премествания:

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\dot{x}}{r_2} \rightarrow \delta \varphi_2 = \frac{\delta x}{r_2}$$

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{\dot{x}}{R_3 - r_3} \rightarrow \delta \varphi_3 = \frac{\delta x}{R_3 - r_3}$$

Окончателната форма на израза за възможната работа става и от него намираме обобщената сила

$$\begin{aligned}\delta A &= m_1 g \sin \alpha \cdot \delta x - \mu m_1 g \cos \alpha \cdot \delta x - M_C \frac{\delta x}{r_2} - M_{TP} \frac{\delta x}{R_3 - r_3} = \\ &= \left(m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha - \frac{M_C}{r_2} - \frac{f m_3 g}{R_3 - r_3} \right) \delta x = Q_x \cdot \delta x \\ Q_x &= m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha - \frac{M_C}{r_2} - \frac{f m_3 g}{R_3 - r_3}\end{aligned}$$

4) Диференцираме по схемата на уравнения на Лагранж:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = A \dot{x};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = A \ddot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

и получаваме ДУ на движение (\ddot{x} е търсеното ускорение на тяло 1):

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 \frac{r_3^2 + i^2}{(R_3 - r_3)^2} \right) \ddot{x} = m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha - \frac{M_C}{r_2} - \frac{f n}{R_3}.$$